VO Analysis 9.4.18

$$0 < x_n - \sqrt{y} < \frac{1}{2} \cdot (x_{n-1} - \sqrt{y})$$

Bei Indexverschiebung um -1 kommt $\boxed{\cdot \frac{1}{2}}$ hinzu

Bemerkung:

$$\lim_{n \to \infty} 1/n^\alpha = 0, \quad \alpha > 0$$

$$\lim_{n \to \infty} 1 = 1$$

$(n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$, $\alpha > 0$, unbeschränkt (divergent)

Zu zeigen

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

3 Identitäten
Sandwich-Lemma
Rechenregeln

Sandwich-Lemma $\lim_{n \to \infty} a_n = 0 = \lim_{n \to \infty} b_n$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} c_n = 0$

$$0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$$

$2^n > n \ \forall n$ IS: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > \underbrace{2n}_{n+n} \geq n+1$

2.10 Def. (Reelle Zahlen)

Menge d. reellen Zahlen (Äquivalenzklassen von allen CF die gegen A konv.)

$$\mathbb{R} = \{ A = [(a(n))_{n \in \mathbb{N}}] : a: \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \text{ Cauchy-Folge}, \lim_{n \to \infty} a(n) = A \}$$

BRUNNEN

$([a(n)_{n\in\mathbb{N}}]$ alle möglichen Näherungen an $A \in \mathbb{R}$)

ist die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ (mit Grenzwerten von CF)

$A \in \mathbb{R}$ wird durch die Näherungen $A \approx a(n) \in \mathbb{Q}$ beschrieben,

wobei

$$A = [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] = \{\tilde{a}_n : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} : \tilde{a} \text{ CF}, \lim_{n\to\infty} \tilde{a}_n - a_n = \tilde{A} - A = 0\}$$

Bemerkung

Addition in $\mathbb{R}$

$$C = A + B = \overbrace{[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]}^{\text{Näherung an } A} + \overbrace{[(b_n)_{n\in\mathbb{N}}]}^{\text{Näherung an } B}$$

$$= [c = (\underset{\in\mathbb{Q}}{a_n} + \underset{\in\mathbb{Q}}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}]$$

$$= \{\tilde{c} : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} : \tilde{c} \text{ CF}, \lim_{n\to\infty} \tilde{c}_n - c_n = 0\}$$

$$= \{\tilde{c} : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} : \ldots \lim_{n\to\infty} \underbrace{\tilde{a}_n + \tilde{b}_n}_{\tilde{c}_n} - \underbrace{(a_n + b_n)}_{c_n}$$

elementweise Addition

$$= \lim_{n\to\infty} \tilde{a}_n - a_n + \lim_{n\to\infty} \tilde{b}_n - b_n = 0 + 0 = 0$$

Praxis: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ "=" $\underbrace{1.41}_{\approx \sqrt{2}} + \underbrace{1.73}_{\approx \sqrt{3}} = \underbrace{3.14}_{\approx \sqrt{2}+\sqrt{3}}$

Multiplikation in $\mathbb{R}$

$$C = A \cdot B = [c = (a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}]$$

Konstruktiver Zugang zu reellen Zahlen:

$\underbrace{\text{Heron - Verfahren}}_{\substack{\text{zur Konstruktion} \\ \text{v. reellen Zahlen} \\ \sqrt{y},\ y > 0}}$

Existenz von $\mathbb{R}$

Axiomatische Zugang zu reellen Zahlen über Infima und Suprema beschränkter Mengen

Bsp. Heron-Verfahren

$$x_0 = 2 = y \quad (2 < x_0^2 \leq 2 \cdot 2)$$

Satz v. Heron $\quad \sqrt{2} < x_n < x_{n-1} \quad$ (Teil 2)

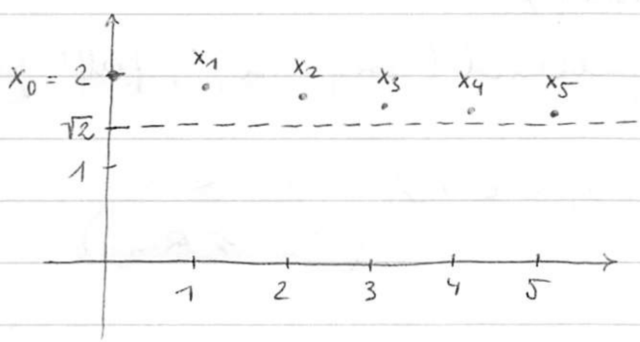
$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend und

Infimum = GW

$x_n > \boxed{\sqrt{2}} \ \forall n$

($\sqrt{2}$ u.u. beschränkt)

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch



$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = \sqrt{2}$$

(da $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\varepsilon$:
$|x_n - \sqrt{2}| < \varepsilon$)

Betrachte

$$X = \{ x_n^{\in \mathbb{Q}} : n \in \mathbb{N} \}$$

Hat X Minima, Maxima, Infima, Suprema?

Maximum stärker als Sup.

$\max X = \max \{x_1, x_2, \dots\} = x_1 = \sup X$
$\min X$ gibt es nicht $(\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \notin X)$
$\inf X = \sqrt{2}$

Zu jeder reellen Zahl gibt es eine Folge
$a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $a_n \in \mathbb{Q}$, s.d.

a monoton fallend (steigend)
a ist nach unten (nach oben) beschränkt

Dann gilt: $A = \lim_{n \to \infty} a_n = \inf \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$
$(\sup \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\})$

2.11 Def Eine Folge $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt
(Abbildung)
monoton fallend (steigend), falls gilt

$\forall n \geq m \ (n, m \in \mathbb{N}) : a_n \leq a_m$
$(a_n \geq a_m)$

2.12 Def (Infima, Suprema)

Sei $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$. Eine reelle Zahl $s \in \mathbb{R}$ heißt Supremum (Infimum) von X falls

Sup (i) $\forall x \in X : x \leq s$ (s isd eine obere Schranke ~~von~~ für X)

(ii) $\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in X : x > s - \varepsilon$ (s isd die kleinste obere Schranke)

Inf (i) $\forall x \in X : x \geq s$ (s isd eine untere Schranke)

(ii) $\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in X : x < s + \varepsilon$ (s isd die größter untere Schranke)

<u>Bemerkung:</u>

Konvergent von $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ gegen $A \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon : \underbrace{|a_n - A| < \varepsilon}_{a_n \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)}$$

für <u>alle</u> $n \geq n_\varepsilon$

Supremum $s = \sup \{ a_n : n \in \mathbb{N} \}$

$$(ii) \quad \forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \underbrace{s \overset{(i)}{\geq} \underbrace{a(n_\varepsilon)}_{x \in X} > s - \varepsilon}_{a(n_\varepsilon) \in (s-\varepsilon, s] \subseteq (s-\varepsilon, s+\varepsilon)}$$

<u>ein</u> Element

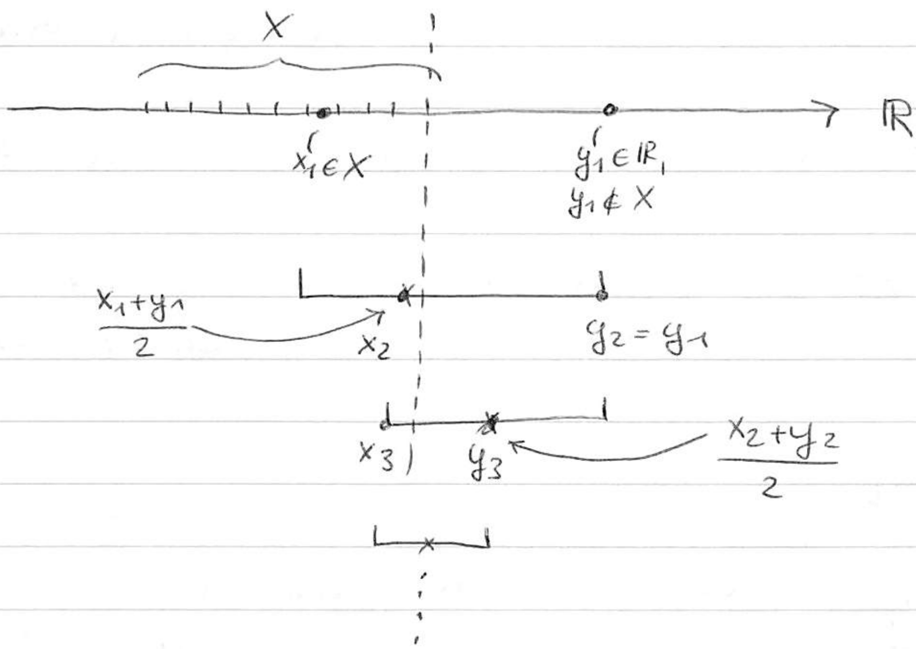
<u>~~Vermutung~~ Beispiele + Bemerkungen</u>

(i) Vermutung (Euklid, Bolzano):

Falls $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, nach oben beschränkt (siehe Def. 2.12), dann

$\exists s \in \mathbb{R}: \quad s = \sup X$ (sup X ist eine Zahl)

Beweisidee (Ana in d. historischen Entwicklung, Satz 1.12, p198)



Konstruktion

obere Schranken

1) Abstände zw. x_i und y_i werden kleiner, d.h.

$$\lim_{n \to \infty} y_n - x_n = 0$$

2) Da x_i und y_i Mittelpunkte sind

$$\lim_{n \to \infty} y_n - x_n = \lim_{n \to \infty} \frac{x_1 + y_1}{2^n} = (x_1 + y_1) \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

3) Alle y_n sind obere Schranken für X

$$\lim_{n \to \infty} y_n = s = \sup X$$

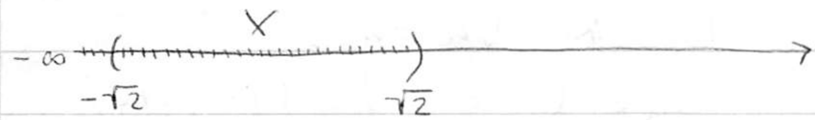
d.h. Konv. von $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$
$\Rightarrow$ Existenz von GW $s \in \mathbb{R}$

Konstr. $\Rightarrow s = \sup X$

4) Alle $x_n \in X$ und $\lim_{n \to \infty} x_n = s$

(ii) Es ist wichtig, dass $s \in \mathbb{R}$, denn die Menge

$$X = \{ x \in \mathbb{Q} : \underbrace{x^2 < 2}_{\Leftrightarrow |x| < \sqrt{2} \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})} \}$$



hat $s = \sup X = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$

<u>Satz 2.13</u> Falls $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ <u>monoton</u> steigend und nach oben beschränkt, dann konvergiert a gegen

$$s = \sup \{ a_n : n \in \mathbb{N} \}$$

$$\left(\lim_{n \to \infty} a_n = s \right)$$

(Falls $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ <u>monoton</u> fallend und nach unten beschränkt, dann

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \inf \{ a_n : n \in \mathbb{N} \}$$
)

<u>Bew</u> Die Menge $X = \{ a_n : n \in \mathbb{N} \} \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$ und nach oben beschränkt, denn $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq \tilde{S}$

Euklid, Bolzano $\Rightarrow \exists s \in \mathbb{R} : s = \sup X$

$$\overset{\text{Def 2.12.}}{\Rightarrow} \forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : a(n_\varepsilon) > s - \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : s - \varepsilon < a(n_\varepsilon) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{a mon.} \\ \text{wachsend}}}{\leq} a(n_\varepsilon + 1)$$

$$\leq a(n_{\varepsilon+2}) \ldots \underset{\substack{\uparrow \\ 2.12 i)}}{\leq} s$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon :$$

$$\underbrace{a_n \in (s-\varepsilon, s] \subseteq (s-\varepsilon, s+\varepsilon)}_{|a_n - s| < \varepsilon}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = s$$

def. als $\sup X$ $\blacksquare$

Beispiele

Folge $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, $\alpha > 0$, Nullfolge

- monoton fallend, denn
$$\forall n \geq m : \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{m^\alpha}$$

- nach unten beschränkt, denn
$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n^\alpha} > 0 \quad \left(\text{Inf} : \frac{1}{n^\alpha} \geq x \geq 0\right)$$

$$\overset{2.13}{\Rightarrow} \left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen } \underset{\substack{\shortparallel \\ 0 \\ \shortparallel \\ x}}{\text{Inf}} \left\{ 1/n^\alpha : n \in \mathbb{N} \right\} \in \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}$ archimedische Körper:

$$\underbrace{\forall x \in \mathbb{R}\ \exists m \in \mathbb{N} : x < m}_{\text{arch. Axiom}}$$

Folgerung: $\forall m \in \mathbb{N} : 0 \leq x < \frac{1}{m} \iff x = 0$

"$\Leftarrow$" trivial

"$\Longrightarrow$" Annahme: $x > 0$ und $x < 1$ (da $x < \frac{1}{m}\ \forall m \in \mathbb{N}$)

$$\Rightarrow \exists \tilde{m} \in \mathbb{N} : \left((\tilde{m} \cdot x > 1) \iff \left(x > \frac{1}{\tilde{m}} \right) \right)$$

$\lightning$

(zu: $x < \frac{1}{m}$)

$$\Rightarrow \inf \left\{ \frac{1}{n^\alpha} : n \in \mathbb{N} \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0, \quad \alpha > 0$$

Bemerkung

(i) $\forall x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : x < n \quad \Rightarrow$

vgl. $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist unbeschränkt

$$\forall c > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : n > c$$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : x < n \overset{1.6.(i)}{\Rightarrow}$

$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon}_{\text{Folge } (\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}} \text{ konv. gegen } 0, \text{ d.h.}}$$

$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon :$

$0 < \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$